

Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria industriale
Corso di laurea in Ingegneria meccanica
Anno accademico 2008-09

Insegnamento di Costruzione di Macchine I
(Prof. M. Giglio, M. Gobbi, S. Miccoli, M. Sangirardi)

Esercizio n° 9

Esercitazione n° 3 – Analisi cinematica

Effettuare l'analisi cinematica della struttura in Figura 1 e successivamente determinare le reazioni vincolari.

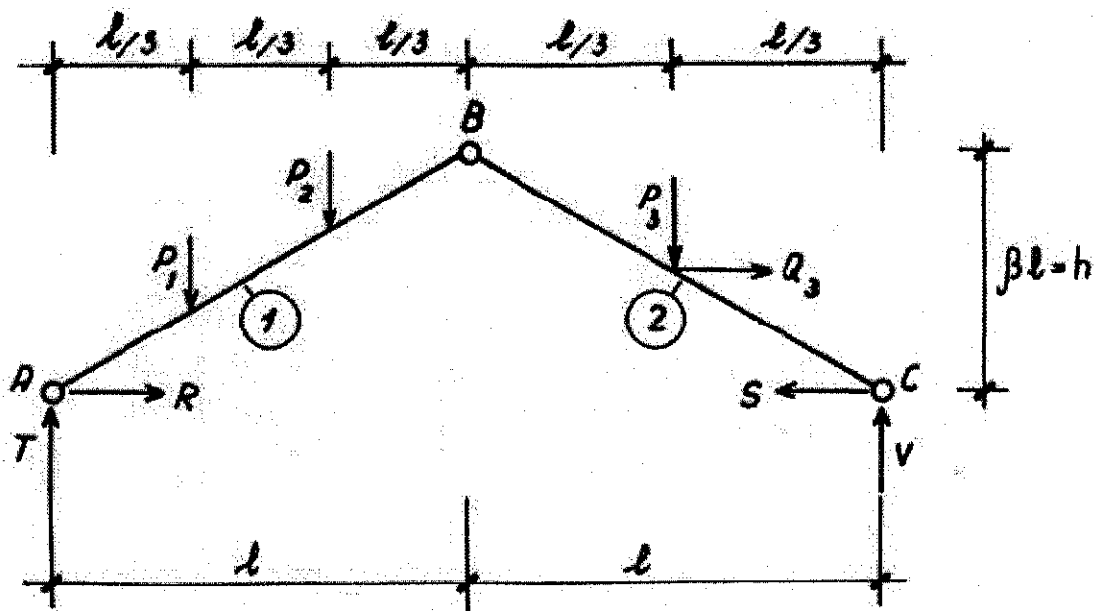


Figura 1

caricate anche al di fuori dei nodi, estrarre la cerniera B ed imporre l'equilibrio sotto l'azione del carico P e delle forze scambiate con le aste 1 e 2).

Per l'equilibrio dell'asta 1 alla rotazione intorno alla cerniera H si ottiene:

$$T = \frac{3}{5} R;$$

analogamente, per l'equilibrio della trave 2 alla rotazione intorno alla cerniera D, si ottiene:

$$V = \frac{2}{5} K;$$

la condizione di equilibrio alla rotazione del complesso formato dalle travi 1 e 4 intorno alla cerniera F comporta che sia:

$$V a + T a - R \frac{3}{5} a - K \frac{3}{5} a = 0;$$

sostituendo le espressioni T e V appena ottenute, si ha:

$$K = 0.$$

L'equazione di equilibrio globale alla rotazione intorno al polo O comporta che sia:

$$R = 3P;$$

infine, per l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale:

$$S = -2P.$$

Considerazioni analoghe si applicano se l'anello chiuso viene aperto in corrispondenza di altra cerniera, ad esempio H (fig. 33).

Le condizioni di equilibrio alla rotazione delle aste 1 e 4 intorno alle cerniere B ed F rispettivamente comportano:

$$X = \frac{2}{5} R, Y = \frac{3}{5} K.$$

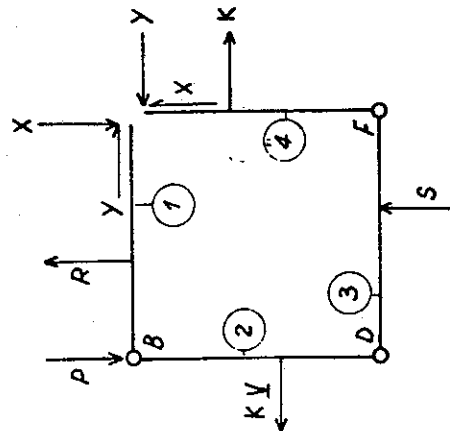


figura 33

la condizione di equilibrio del complesso delle travi 1 e 2 alla rotazione intorno alla cerniera D è la seguente:

$$X a + Y a - R \frac{2}{5} a - K \frac{2}{5} a = 0; \quad (*)$$

sostituendo le espressioni di X ed Y si ha:

$$K = 0.$$

Il lettore può controllare che i calcoli risultano meno immediati se si scrive la condizione di equilibrio del complesso delle travi 3 e 4 alla rotazione intorno alla cerniera D, per altro equivalente alla (*).

Esempio 12

Si consideri l'arco a tre cerniere rappresentato in figura 34, presenta un certo interesse lo studio del problema del calcolo delle reazioni in relazione al fenomeno della labilità che si verifica quando le tre cerniere sono allineate, ossia al tendere della freccia h a zero.

In figura 35 sono messe in evidenza le componenti di reazione; l'equazione di equilibrio globale alla rotazione della travatura intorno alla cerniera A si scrive:

$$V_2 l - P_1 l/3 - P_2 2l/3 - P_3 3l/2 - Q_3 \beta l/2 = 0;$$

l'equazione di equilibrio dell'asta 2 intorno alla cerniera B è la seguente

$$V_2 - S \beta l - P_3 l/2 + Q_3 \beta l/2 = 0.$$

Il sistema delle equazioni che forniscono le reazioni vincolari si completa con le equazioni di equilibrio globale in direzione verticale ed in direzione orizzontale. Una volta separate le incognite dai termini noti si ha:

$$2V = P_1/3 + 2P_2/3 + 3P_3/2 + \beta Q_3/2 \quad (1)$$

$$V - \beta S = P_3/2 - \beta Q_3/2 \quad (2)$$

$$V + T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$-R + S = Q_3.$$

Analizzando il sistema sopra riportato si riconosce che, quando è $\beta \neq 0$, la soluzione si ottiene facilmente con il metodo di sostituzione operando a partire dalla prima equazione.

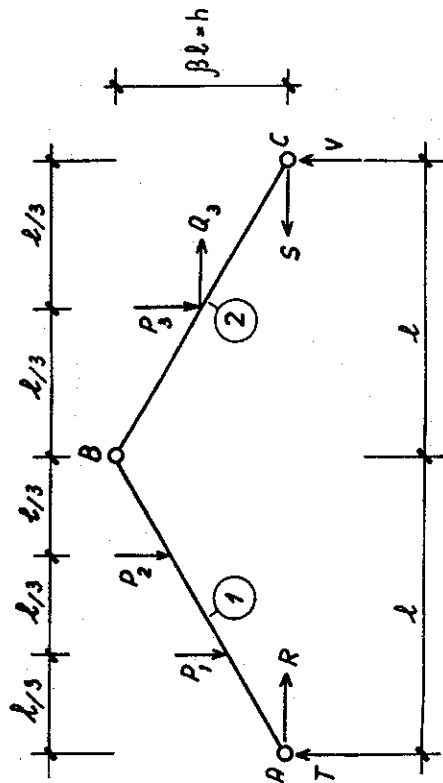


figura 34

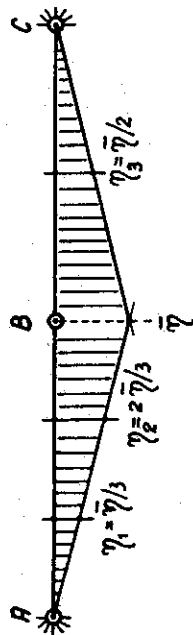


figura 35

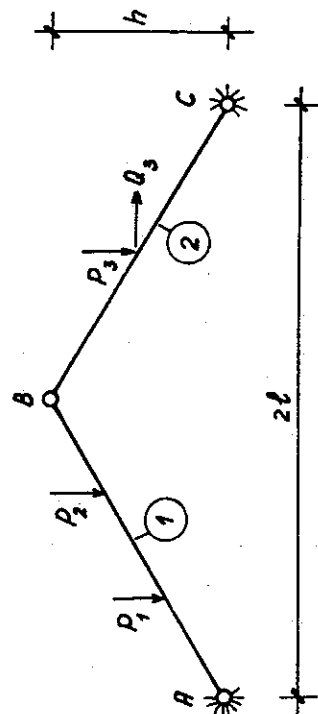


figura 36

Quando $\beta = 0$ (ossia quando la travatura è labile perché la tre carriere risultano allineate) l'equilibrio in generale non è possibile: questo è il significato fisico delle costatazioni algebriche che non esiste la soluzione del sistema delle equazioni di equilibrio che forniscono le reazioni.

In questa particolare situazione si possono calcolare le reazioni e l'equilibrio è possibile solo per particolari valori dei carichi P_1 , P_2 , P_3 , quando le definizioni della reazione V fornite dalle prime due equazioni (1) e (2) sono coincidenti, cioè solo se risulta:

$$P_3 = P_1 / 3 + 2P_2 / 3 + 3P_3 / 2,$$

ossia:

$$P_1 / 3 + 2P_2 / 3 + P_3 / 2 = 0. \quad (3)$$

Questa condizione (che permette il calcolo delle reazioni anche nel caso di travatura labile) assume preciso significato fisico se si considera il movimento virtuale (fig. 36) possibile per la travatura in queste condizioni.

Il lavoro virtuale compiuto dai carichi applicati per lo spostamento virtuale possibile vale:

$$\mathcal{L} = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3,$$

esprimendo le componenti di spostamento η_i in funzione dello spostamento $\bar{\eta}$ della cerniera intermedia si ha:

$$\mathcal{L} = P_1 \bar{\eta} / 3 + P_2 2 \bar{\eta} / 3 + P_3 \bar{\eta} / 2,$$

e raccogliendo $\bar{\eta}$:

$$\mathcal{L} = \bar{\eta} (P_1 / 3 + 2 P_2 / 3 + P_3 / 2),$$

se è verificata la (3) si osserva che:

$$\mathcal{L} = 0,$$

cioè la condizione di esistenza della soluzione del sistema ha dunque significato di condizione di equilibrio in relazione alla possibilità di movimento della travatura labile.

Per altro si riconosce che la soluzione, pur esistendo, è in parte indeterminata (componenti orizzontali R ed S) cioè il problema diventa iperstatico.

Nell'esempio 13 è trattato, per un caso più complesso, il problema delle travature labili alla luce delle informazioni fornite dalla teoria dei sistemi di equazioni lineari.

Esempio 13

La travatura rappresentata in figura 37, ripresa dall'esempio 11, è stata oggetto di analisi cinematica dettagliata nel capitolo 1: da quelle considerazioni si può concludere, ad esempio, che la travatura è labile quando i carrelli A ed E stanno su una stessa verticale. Qui di seguito si mostra che il problema del calcolo delle reazioni, alla luce della teoria delle trasformazioni lineari, fornisce ampie informazioni anche sul comportamento cinematico delle travature.

In figura 38 sono state messe in evidenza le principali dimensioni, le componenti di reazione incognite e le componenti dell'azione interna che le aste 1 e 4 si scambiano in corrispondenza della cerniera H.

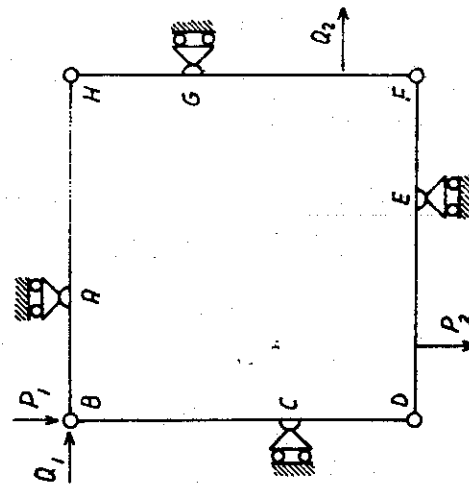


figura 37

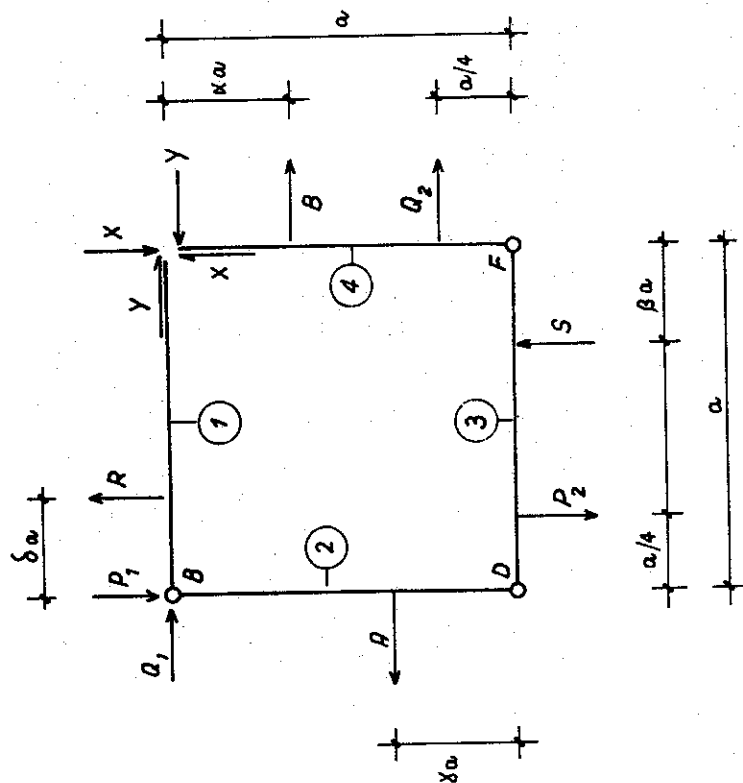


figura 38

Oltre alle equazioni di equilibrio globali alle traslazioni secondo le direzioni verticale ed orizzontale:

$$\begin{cases} R + S = P_1 + P_2, \\ A - B = Q_1 + Q_2, \end{cases}$$

si possono scrivere le seguenti equazioni di equilibrio seguendo la traccia dell'esempio 11,

equilibrio alla rotazione della trave 1 intorno alla cerniera B:

$$R \delta a - X a = 0,$$

equilibrio del complesso delle travi 1 e 2 intorno alla cerniera D,

$$X a + Y a - R \delta a + Q_1 a - A Y a = 0,$$

equilibrio alla rotazione delle travi 4 intorno alla cerniera F: